

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» केंद्रीय प्रवृत्ति की माप का परिचय

प्रश्न 1 (आसान). केंद्रीय प्रवृत्ति की माप का मुख्य उद्देश्य क्या है?

उत्तर – आँकड़ों को एक एकल मान में संक्षिप्त करना जो पूरे डेटा का प्रतिनिधित्व करता है।

प्रश्न 2 (आसान). केंद्रीय प्रवृत्ति की माप से हमें क्या जानकारी मिलती है?

उत्तर – यह हमें डेटा के 'center' या बीच वाले हिस्से का अंदाज़ा देती है।

प्रश्न 3 (मध्यम). अगर आपके पास 100 छात्रों के परीक्षा के अंक हैं, तो केंद्रीय प्रवृत्ति की माप क्यों उपयोगी होगी?

उत्तर – यह 100 अलग-अलग अंकों को याद रखने या तुलना करने के बजाय, पूरी कक्षा के औसत प्रदर्शन को एक ही नंबर से समझने में मदद करेगी। इससे आप 'class performance' की तुलना दूसरी कक्षाओं से आसानी से कर सकते हैं।

» समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

प्रश्न 4 (आसान). अगर 3 छात्रों का वज़न 40 kg, 45 kg, और 35 kg है, तो उनका औसत वज़न कितना होगा?

उत्तर – 40 kg

प्रश्न 5 (आसान). एक परिवार की 4 महीने की बिजली की खपत (यूनिट में) 50, 60, 40, 70 है। औसत मासिक खपत क्या है?

उत्तर – 55 यूनिट

प्रश्न 6 (मध्यम). एक हफ्ते में एक फल वाले की आमदनी (₹. में) है: 200, 250, 180, 300, 220, 280, 230। उसकी 'औसत दैनिक आमदनी' क्या है?

उत्तर – 237.14 ₹ (लगभग)

प्रश्न 7 (कठिन). अगर 10 प्रेक्षकों का समांतर माध्य 25 है, और फिर बाद में पता चला कि एक प्रेक्षक 30 के बजाय गलती से 20 पढ़ लिया गया था, तो 'सही समांतर माध्य' क्या होगा?

उत्तर – 26

» असमूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य की गणना (प्रत्यक्ष विधि)

प्रश्न 8 (आसान). निम्न आँकड़ों का समांतर माध्य निकालें: 5, 8, 10, 7, 10

उत्तर – 8

प्रश्न 9 (आसान). एक छात्र ने चार परीक्षाओं में 12, 15, 13, 16 अंक प्राप्त किए। उसका औसत अंक क्या है?

उत्तर – 14

प्रश्न 10 (मध्यम). निम्न मासिक आय (रुपये में) का समांतर माध्य निकालें: 12000, 15000, 10000, 18000, 13000, 14000

उत्तर – 13666.67

» असमूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य की गणना (कल्पित माध्य विधि और पद विचलन विधि)

प्रश्न 11 (आसान). निम्नलिखित डेटा का कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात करें: 10, 20, 30, 40, 50। $A = 30$ मानें।

उत्तर – 30

प्रश्न 12 (आसान). अगर $A = 100$, $N = 5$ और $d = 50$ है, तो समांतर माध्य (X) क्या होगा?

उत्तर – 110

प्रश्न 13 (मध्यम). दिए गए डेटा का कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात करें: 25, 35, 45, 55, 65, 75. $A = 50$ मानें।

उत्तर – 50

प्रश्न 14 (कठिन). एक कंपनी के 8 कर्मचारियों का मासिक वेतन (हजारों में): 18, 22, 15, 20, 25, 19, 21, 23. कल्पित माध्य विधि का उपयोग करके औसत मासिक वेतन ज्ञात करें। ($A = 20$ मानें)

उत्तर – 20.375 हजार

» समूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य की गणना (विविक्त श्रृंखला)

प्रश्न 15 (आसान). निम्नलिखित डेटा के लिए प्रत्यक्ष विधि से समांतर माध्य ज्ञात करें:

Marks (X): 10, 20, 30

Students (f): 5, 8, 7

उत्तर – $X = 20.5$

प्रश्न 16 (आसान). यदि $\sum fX = 450$ और $f = 15$, तो समांतर माध्य (X) क्या होगा?

उत्तर – $X = 30$

प्रश्न 17 (मध्यम). एक फैक्ट्री में श्रमिकों की दैनिक मजदूरी (X) और श्रमिकों की संख्या (f) नीचे दी गई है। कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method) का उपयोग करके समांतर माध्य ज्ञात करें। $A = 150$ मानें।

Mazdoori (X): 100, 120, 150, 180, 200

Workers (f): 10, 15, 20, 12, 8

उत्तर – $X = 149.23$

प्रश्न 18 (कठिन). पद विचलन विधि (Step Deviation Method) का उपयोग करके निम्नलिखित डेटा का समांतर माध्य ज्ञात करें। $A = 500$, $c = 100$ मानें।

Income (X): 100, 200, 300, 400, 500, 600

Families (f): 5, 10, 15, 20, 12, 8

उत्तर – $X = 388.89$

» समूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य की गणना (संतत श्रृंखला)

प्रश्न 19 (आसान). वर्ग अंतराल 40-50 का मध्यमान (mid-point) क्या होगा?

उत्तर – 45

प्रश्न 20 (आसान). अगर वर्ग अंतराल 5-15 है और बारंबारता 4 है, तो 'fm' का मान क्या होगा?

उत्तर – 40 (मध्यमान 10, $fm = 10 \times 4 = 40$)

प्रश्न 21 (मध्यम). निम्नलिखित आंकड़ों से प्रत्यक्ष विधि द्वारा समांतर माध्य ज्ञात करें:

वर्ग: 10-20, 20-30, 30-40

बारंबारता: 5, 8, 7

उत्तर – समांतर माध्य = 27.5

» समांतर माध्य की विशेषताएँ और भारित समांतर माध्य

प्रश्न 22 (आसान). समांतर माध्य से मर्दों के विचलन का योग कितना होता है?

उत्तर – शून्य

प्रश्न 23 (आसान). क्या समांतर माध्य चरम मूल्यों (extreme values) से प्रभावित होता है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 24 (मध्यम). एक क्लास में 4 बच्चों के अंक 10, 12, 14, 16 हैं। यदि 5वें बच्चे के अंक 80 हों, तो क्या माध्य पर इसका असर पड़ेगा? अगर हाँ, तो कैसे?

उत्तर – हाँ, माध्य पर बहुत असर पड़ेगा। 80 एक चरम मूल्य है, जो माध्य को बहुत ज़्यादा बढ़ा देगा।

प्रश्न 25 (कठिन). आपके पास एक शहर में 3 मोहल्लों में प्रति व्यक्ति आय का डेटा है: मोहल्ला A (आय ₹10,000, जनसंख्या 1000), मोहल्ला B (आय ₹15,000, जनसंख्या 500), मोहल्ला C (आय ₹8,000, जनसंख्या 1500)। इस शहर की भारित औसत प्रति व्यक्ति आय क्या होगी?

उत्तर – भारित औसत प्रति व्यक्ति आय = $(10000 \times 1000 + 15000 \times 500 + 8000 \times 1500) / (1000 + 500 + 1500) = (10000000 + 7500000 + 12000000) / 3000 = 29500000 / 3000 = ₹9833.33$

» मध्यिका (Median)

प्रश्न 26 (आसान). निम्नलिखित डेटा की मध्यिका ज्ञात करें: 5, 2, 8, 1, 4।

उत्तर – 4

प्रश्न 27 (आसान). यदि एक डेटा सेट में 9 मान हैं, तो मध्यिका कौन सा पद होगा?

उत्तर – 5वां पद

प्रश्न 28 (मध्यम). निम्नलिखित डेटा की मध्यिका ज्ञात करें: 10, 12, 15, 8, 20, 11।

उत्तर – 11.5

प्रश्न 29 (कठिन). एक कक्षा में 10 छात्रों के परीक्षा में अंक इस प्रकार हैं: 35, 42, 28, 55, 30, 48, 25, 50, 40, 32। इन अंकों की मध्यिका ज्ञात करें।

उत्तर – 37.5

» मध्यिका का अभिकलन (असमूहित और विविक्त शृंखला)

प्रश्न 30 (आसान). असमूहित शृंखला के लिए मध्यिका ज्ञात करें: 5, 2, 8, 1, 9

उत्तर – 5

प्रश्न 31 (आसान). मध्यिका ज्ञात करें: 10, 12, 8, 14

उत्तर – 11

प्रश्न 32 (मध्यम). निम्न विविक्त शृंखला के लिए मध्यिका ज्ञात करें:

उत्तर – मध्यिका = 30

(Steps:

1. Cumulative Frequency (cf) table:

X | f | cf

--|---|---

10 | 2 | 2

20 | 4 | 6

30 | 10 | 16

40 | 4 | 20

2. $N = f = 20$

3. Median position = $(N+1)/2 = (20+1)/2 = 10.5\text{th item}$

4. Look for 10.5 in cf. It falls in 16cf, whose corresponding X is 30.)

» मध्यिका का अभिकलन (संतत श्रृंखला)

प्रश्न 33 (आसान). अगर $N=50$ है, तो संतत श्रृंखला में मध्यिका की स्थिति क्या होगी?

उत्तर – 25वीं स्थिति

प्रश्न 34 (आसान). यदि मध्यिका वर्ग 30-40 है, तो L (निम्न सीमा) का मान क्या होगा?

उत्तर – 30

प्रश्न 35 (मध्यम). वर्ग अंतराल: 0-20, 20-40, 40-60। बारंबारता: 6, 10, 4। मध्यिका वर्ग ज्ञात करें।

उत्तर – 20-40 ($N=20$, $N/2=10$, cf में 6 के बाद 16 में आएगा)

प्रश्न 36 (कठिन). वर्ग अंतराल: 100-150, 150-200, 200-250, 250-300। बारंबारता: 15, 20, 25, 10। मध्यिका ज्ञात करें।

उत्तर – 204.17 ($N=70$, $N/2=35$. मध्यिका वर्ग 200-250। $L=200$, $f=25$, $cf=35$, $h=50$)

» चतुर्थक (Quartiles) और शतमक (Percentiles)

प्रश्न 37 (आसान). अगर किसी डेटा का '50वां शतमक' (50th percentile) 45 है, तो इसका क्या मतलब है?

उत्तर – इसका मतलब है कि 50% डेटा 45 से कम है।

प्रश्न 38 (आसान). अगर आप डेटा को चार बराबर भागों में बांट रहे हैं, तो आप क्या निकाल रहे हैं?

उत्तर – चतुर्थक (Quartiles)।

प्रश्न 39 (मध्यम). अगर एक छात्र का परीक्षा में 75वां शतमक (75th percentile) आता है, तो वह कितने प्रतिशत छात्रों से बेहतर प्रदर्शन कर रहा है?

उत्तर – वह 75% छात्रों से बेहतर प्रदर्शन कर रहा है।

प्रश्न 40 (कठिन). किसी डेटा सेट में $Q1$ और $Q3$ का क्या महत्व है? वे मिलकर क्या दर्शाते हैं?

उत्तर – $Q1$ और $Q3$ के बीच का क्षेत्र केंद्रीय 50% डेटा को दर्शाता है। यह बताता है कि डेटा का एक बड़ा हिस्सा कहाँ केंद्रित है।

» चतुर्थकों का परिकलन

प्रश्न 41 (आसान). निम्नलिखित डेटा के लिए $Q1$ ज्ञात कीजिए: 5, 7, 8, 10, 12

उत्तर – $Q1 = 6$

प्रश्न 42 (आसान). निम्नलिखित डेटा के लिए $Q3$ ज्ञात कीजिए: 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28

उत्तर – $Q3 = 25$

प्रश्न 43 (मध्यम). एक कक्षा में 8 छात्रों के गणित के अंक हैं: 45, 60, 30, 75, 50, 80, 55, 65। $Q1$ और $Q3$ का परिकलन कीजिए।

उत्तर – $Q1 = 47.5$, $Q3 = 70$

प्रश्न 44 (कठिन). विविक्त श्रृंखला में $Q1$ और $Q3$ का परिकलन कीजिए: $X = 10, 20, 30, 40, 50$ और $f = 2, 3, 5, 4, 1$ (संकेत: पहले संचयी बारंबारता (CF) ज्ञात करें)

उत्तर – $Q1 = 20$, $Q3 = 30$

» बहुलक (Mode)

प्रश्न 45 (आसान). डेटा सेट 7, 8, 9, 8, 7, 8, 10 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर – बहुलक = 8

प्रश्न 46 (आसान). एक दुकानदार ने एक हफ्ते में 10, 12, 10, 11, 10, 12, 13 साइज़ के जूते बेचे। सबसे 'Mode' साइज़ क्या है?

उत्तर – Mode साइज़ = 10

प्रश्न 47 (मध्यम). निम्नलिखित विविक्त श्रृंखला में बहुलक ज्ञात कीजिए:

उत्तर – बहुलक = 20 (क्योंकि इसकी बारंबारता 25 है, जो सबसे ज्यादा है)

प्रश्न 48 (कठिन). क्या किसी डेटा सेट में एक से ज्यादा बहुलक हो सकते हैं? उदाहरण दें।

उत्तर – हाँ, हो सकते हैं। जैसे 1, 2, 2, 3, 3, 4 में बहुलक 2 और 3 दोनों हैं (द्विबहुलकी)। या ऐसा भी हो सकता है कि कोई बहुलक न हो, जैसे 1, 2, 3, 4 में कोई संख्या बार-बार नहीं आई।

» बहुलक का अभिकलन (विविक्त श्रृंखला)

प्रश्न 49 (आसान). निम्नलिखित विविक्त श्रृंखला में बहुलक ज्ञात कीजिए: चर: 2, 3, 4, 5; बारंबारता: 5, 8, 10, 6

उत्तर – बहुलक = 4

प्रश्न 50 (आसान). डेटासेट: चर: 10, 20, 30, 40; बारंबारता: 7, 12, 9, 5। बहुलक क्या है?

उत्तर – बहुलक = 20

प्रश्न 51 (मध्यम). निम्न श्रृंखला में बहुलक ज्ञात करें: चर: 1, 2, 3, 4, 5, 6; बारंबारता: 3, 7, 5, 7, 2, 1

उत्तर – यहाँ दो बहुलक हैं: 2 और 4 (क्योंकि दोनों की बारंबारता 7 है)।

प्रश्न 52 (कठिन). एक कक्षा में विद्यार्थियों के प्राप्तांक और उनकी संख्या दी गई है। बहुलक प्राप्तांक ज्ञात कीजिए: प्राप्तांक: 50, 60, 70, 80, 90; विद्यार्थियों की संख्या: 4, 6, 4, 3, 2

उत्तर – बहुलक = 60

» बहुलक का अभिकलन (संतत श्रृंखला)

प्रश्न 53 (आसान). निम्नलिखित डेटा में बहुलक वर्ग की पहचान करें:

वर्ग: 0-10, 10-20, 20-30, 30-40

बारंबारता: 5, 12, 18, 9

उत्तर – बहुलक वर्ग: 20-30

प्रश्न 54 (आसान). यदि बहुलक वर्ग 40-50 है और $L=40$, $h=10$ है, तो $D1$ और $D2$ क्या होंगे यदि बारंबारताएँ 20, 35, 15 हैं (क्रमशः पूर्ववर्ती, बहुलक, परवर्ती)?

उत्तर – $D1 = 35 - 20 = 15$, $D2 = 35 - 15 = 20$

प्रश्न 55 (मध्यम). निम्नलिखित डेटा के लिए बहुलक ज्ञात करें:

वर्ग: 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60

बारंबारता: 6, 15, 25, 18, 8

उत्तर – बहुलक वर्ग: 30-40. $L=30$, $h=10$, $D1=25-15=10$, $D2=25-18=7$. $Mo = 30 + [(10 / (10+7)) * 10] = 30 + (100/17) = 30 + 5.88 = 35.88$

प्रश्न 56 (कठिन). एक कंपनी के कर्मचारियों का साप्ताहिक वेतन (रुपये में) नीचे दिया गया है। बहुलक वेतन की गणना करें:

वेतन: 0-100, 100-200, 200-300, 300-400, 400-500

कर्मचारियों की संख्या: 10, 25, 40, 20, 5

उत्तर – बहुलक वर्ग: 200-300. $L=200$, $h=100$, $D1=40-25=15$, $D2=40-20=20$. $Mo = 200 + [(15 / (15+20)) * 100] = 200 + [(15 / 35) * 100] = 200 + [0.42857 * 100] = 200 + 42.857 = 242.86$ रुपये

» समांतर माध्य, मध्यिका और बहुलक की सापेक्षिक स्थिति

प्रश्न 57 (आसान). यदि समांतर माध्य 100 है और बहुलक 90 है, तो मध्यिका 105 हो सकती है या नहीं?

उत्तर – नहीं, क्योंकि मध्यिका को 90 और 100 के बीच में होना चाहिए।

प्रश्न 58 (आसान). इस रिश्ते के अनुसार, अगर मध्यिका 50 है और बहुलक 45 है, तो समांतर माध्य 60 हो सकता है क्या?

उत्तर – नहीं, क्योंकि मध्यिका को समांतर माध्य और बहुलक के बीच होना चाहिए। अगर मध्यिका 50 और बहुलक 45 है, तो समांतर माध्य को 50 से ज्यादा होना चाहिए, लेकिन 60 बहुत ज्यादा हो सकता है, मध्यिका फिर बीच में नहीं रहेगी। एक अनुमानित मान 55 हो सकता है।

प्रश्न 59 (मध्यम). एक वितरण में, यदि बहुलक 25 और मध्यिका 30 है, तो समांतर माध्य का मान क्या हो सकता है जो इस सापेक्षिक स्थिति को दर्शाता है?

उत्तर – समांतर माध्य का मान 30 से ज्यादा होना चाहिए, जैसे 35। क्योंकि मध्यिका (30) बहुलक (25) और समांतर माध्य (35) के बीच में आ रही है।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक गाँव में 5 परिवारों की मासिक आय (रुपये में) ये हैं: 10000, 12000, 15000, 8000, 20000. इन आंकड़ों की केंद्रीय प्रवृत्ति का परिचय दीजिए।

› हमें 'केंद्रीय प्रवृत्ति की माप' का परिचय देना है, इसका मतलब हमें यह समझाना है कि इन 5 संख्याओं को एक अकेले नंबर से कैसे बताया जा सकता है।

› इन आंकड़ों को इकट्ठा करने का उद्देश्य 'to understand the typical income level of families' है, यानी इन परिवारों की सामान्य आय का स्तर जानना।

› हम 'Mean' (माध्य), 'Median' (मध्यिका) या 'Mode' (बहुलक) का उपयोग करके 'a single representative value' निकाल सकते हैं, जो इन सभी आय को दर्शाएगा।

उत्तर – ये आंकड़े एक गाँव के 5 परिवारों की मासिक आय दिखाते हैं। 'केंद्रीय प्रवृत्ति की माप' का उपयोग करके, हम इन अलग-अलग आयों को एक अकेले प्रतिनिधि मान (single representative value) में समेट सकते हैं। यह मान, जैसे कि 'औसत आय', हमें इस गाँव की आर्थिक स्थिति का एक त्वरित और सरल अंदाज़ा देगा, जिससे पूरे डेटा को समझने में आसानी होगी।

उदाहरण 2. एक दुकान ने पिछले 5 दिनों में कितनी किताबें बेचीं, उसका डेटा है: 10, 15, 8, 12, 20। दुकान की 'औसत दैनिक बिक्री' (average daily sale) ज्ञात करें।

› सबसे पहले, सभी प्रेक्षणों का योग (Sum of all observations) करेंगे: $10 + 15 + 8 + 12 + 20 = 65$.

› अब, प्रेक्षणों की कुल संख्या (Total number of observations) गिनेंगे: यहाँ 5 दिन की बिक्री है, तो $N = 5$.

› समांतर माध्य के सूत्र का उपयोग करेंगे: $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$.

› मानों को सूत्र में रखेंगे: $\bar{X} = 65 / 5$.

उत्तर – $\bar{X} = 13$. तो दुकान की औसत दैनिक बिक्री 13 किताबें हैं।

उदाहरण 3. एक दुकानदार ने एक हफ्ते में अलग-अलग दिनों में इतनी सब्जियां बेचीं (किलोग्राम में): 15, 20, 10, 25, 30, 18, 22। उसकी औसत दैनिक बिक्री (Daily Average Sales) ज्ञात करें।

› पहला कदम: सभी प्रेक्षणों का योग (Sum of all observations) करेंगे। $15 + 20 + 10 + 25 + 30 + 18 + 22 = 140$

› दूसरा कदम: प्रेक्षणों की कुल संख्या (Total number of observations) गिनेंगे। यहाँ '7 दिन' हैं, तो $N = 7$ ।

› तीसरा कदम: सूत्र का उपयोग करेंगे: $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ । $140 / 7 = 20$

उत्तर – दुकानदार की औसत दैनिक बिक्री 20 किलोग्राम है।

उदाहरण 4. दस परिवारों की साप्ताहिक आय दी गई है: 850, 700, 100, 750, 5000, 80, 420, 2500, 400, 360. इसका समांतर माध्य 'कल्पित माध्य विधि' से ज्ञात करें।

› पहला चरण: 'Assumed Mean' यानी कल्पित माध्य (A) चुनें। हम आँकड़ों के बीच की कोई संख्या, जैसे 850 को A मान लेते हैं। 'Let A = 850'.

› दूसरा चरण: प्रत्येक 'Observation (X)' में से A को घटाकर 'विचलन (d)' निकालें। यानी, 'd = X - A'.

› - 850 - 850 = 0

› - 700 - 850 = -150

› - 100 - 850 = -750

› - 750 - 850 = -100

› - 5000 - 850 = 4150

› - 80 - 850 = -770

› - 420 - 850 = -430

› - 2500 - 850 = 1650

› - 400 - 850 = -450

› - 360 - 850 = -490

› तीसरा चरण: सभी विचलनों (d) को जोड़ें। 'Sum of all deviations (d)' = 0 - 150 - 750 - 100 + 4150 - 770 - 430 + 1650 - 450 - 490 = 2660.

› चौथा चरण: आँकड़ों की कुल संख्या (N) ज्ञात करें। यहाँ N = 10 परिवार हैं।

› पांचवां चरण: सूत्र लगाएं: 'X = A + (d / N)'

› - X = 850 + (2660 / 10)

› - X = 850 + 266

› - X = 1116.

उत्तर – समांतर माध्य (Mean) = ₹1116

उदाहरण 5. एक आवासीय कॉलोनी में भूखंड केवल तीन आकारों में मिलते हैं: 100 वर्ग मीटर, 200 वर्ग मीटर और 300 वर्ग मीटर तथा भूखंडों की संख्या क्रमशः 200, 50 एवं 10 है। औसत भूखंड आकार ज्ञात करें।

› सबसे पहले, 'X' (भूखंड का आकार) और 'f' (भूखंडों की संख्या) को लिख लेते हैं।

› X: 100, 200, 300

› f: 200, 50, 10

› अब हम 'Direct Method' से इसे हल करेंगे। सूत्र है: $X = fX / f$

› पहला चरण: 'fX' ज्ञात करें। मतलब हर 'X' को उसकी 'f' से गुणा करें।

› 100 * 200 = 20000

› 200 * 50 = 10000

› 300 * 10 = 3000

› दूसरा चरण: 'fX' ज्ञात करें। मतलब सारे 'fX' को जोड़ दें।

› fX = 20000 + 10000 + 3000 = 33000

› तीसरा चरण: 'f' ज्ञात करें। मतलब सारी 'f' को जोड़ दें।

› f = 200 + 50 + 10 = 260

› चौथा चरण: सूत्र में मान रखें।

› X = 33000 / 260

उत्तर – औसत भूखंड आकार = 126.92 वर्ग मीटर

उदाहरण 6. निम्नलिखित आंकड़ों से प्रत्यक्ष विधि का उपयोग करके समांतर माध्य की गणना करें:

- › वर्ग अंतराल (Marks): 0-10, 10-20, 20-30
- › बारंबारता (f): 2, 3, 5
- › चरण 1: प्रत्येक वर्ग का मध्यमान (m) ज्ञात करें।
- › 0-10 का मध्यमान: $(0+10)/2 = 5$
- › 10-20 का मध्यमान: $(10+20)/2 = 15$
- › 20-30 का मध्यमान: $(20+30)/2 = 25$
- › चरण 2: 'fm' कॉलम बनाएं ($f \times m$)।
- › $5 \times 2 = 10$
- › $15 \times 3 = 45$
- › $25 \times 5 = 125$
- › चरण 3: f और fm ज्ञात करें।
- › $f = 2 + 3 + 5 = 10$
- › $fm = 10 + 45 + 125 = 180$
- › चरण 4: प्रत्यक्ष विधि का सूत्र लगाएं: $X = fm / f$
- › $X = 180 / 10$

उत्तर – $X = 18$

उदाहरण 7. मान लो आपको तीन चीज़ों की औसत कीमत निकालनी है: चावल (कीमत ₹40/kg, महत्व 5), दाल (कीमत ₹80/kg, महत्व 3), चीनी (कीमत ₹50/kg, महत्व 2)। इसका भारित समांतर माध्य निकालो।

- › पहले हर 'item' की कीमत (X) को उसके महत्व (W) से गुणा करो: चावल के लिए $40 \times 5 = 200$, दाल के लिए $80 \times 3 = 240$, चीनी के लिए $50 \times 2 = 100$ ।
- › अब इन सभी गुणनफलों का कुल जोड़ निकालो (WX): $200 + 240 + 100 = 540$ ।
- › फिर सभी महत्वों (W) का कुल जोड़ निकालो (W): $5 + 3 + 2 = 10$ ।
- › आखिर में, भारित समांतर माध्य के सूत्र (WX / W) का उपयोग करके गणना करो: $540 / 10$ ।

उत्तर – भारित समांतर माध्य = ₹54

उदाहरण 8. एक दुकानदार ने एक सप्ताह में आइसक्रीम के पैकेट बेचे: 15, 25, 12, 18, 22, 20, 16। इन आंकड़ों की मध्यिका ज्ञात कीजिए।

- › पहला कदम है, इन आंकड़ों को 'आरोही क्रम' में व्यवस्थित करना। यानी, सबसे छोटे से सबसे बड़े तक।
- › संख्याएँ हैं: 15, 25, 12, 18, 22, 20, 16।
- › आरोही क्रम में लगाने पर ये बनेंगी: 12, 15, 16, 18, 20, 22, 25।
- › अब हम देखेंगे कि कुल कितने पद हैं, जिसे हम 'N' से दर्शाते हैं। यहाँ $N = 7$ (कुल 7 संख्याएँ हैं)।
- › मध्यिका की स्थिति ज्ञात करने का सूत्र है: $(N+1)/2$ वें पद का आकार।
- › सूत्र में मान रखने पर: $(7+1)/2 = 8/2 = 4$ वाँ पद।
- › अब हम अपनी आरोही क्रम वाली सूची में 'चौथे पद' पर देखेंगे। 12 पहला, 15 दूसरा, 16 तीसरा, और 18 चौथा।
- › तो हमारा चौथा पद 18 है।
- › अतः, मध्यिका = 18।

उत्तर – मध्यिका = 18

उदाहरण 9. नीचे कुछ छात्रों द्वारा एक परीक्षा में प्राप्त अंक दिए गए हैं: 15, 25, 20, 30, 10, 35, 40। मध्यिका ज्ञात करें।

- › पहला कदम: आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करें।
- › 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40
- › दूसरा कदम: मदों की संख्या (N) ज्ञात करें।
- › यहाँ $N = 7$ (कुल 7 पद हैं)
- › तीसरा कदम: मध्यिका की स्थिति ज्ञात करने का सूत्र लगाएँ।
- › मध्यिका की स्थिति $= (N+1)/2$ वें पद का आकार
- › $= (7+1)/2$ वें पद का आकार
- › $= 8/2$ वें पद का आकार
- › $=$ चौथे पद का आकार
- › चौथा कदम: आरोही क्रम में व्यवस्थित श्रृंखला में चौथा पद देखें।
- › 10, 15, 20, *25*, 30, 35, 40

उत्तर – मध्यिका = 25

उदाहरण 10. नीचे दिए गए डेटा से मध्यिका का अभिकलन करें:

वर्ग अंतराल: 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50

बारंबारता (f): 5, 8, 12, 10, 5

- › सबसे पहले हमें 'संचयी बारंबारता' (cumulative frequency, cf) निकालनी होगी।
- › वर्ग अंतराल: 0-10, बारंबारता: 5, संचयी बारंबारता (cf): 5
- › वर्ग अंतराल: 10-20, बारंबारता: 8, संचयी बारंबारता (cf): $5+8 = 13$
- › वर्ग अंतराल: 20-30, बारंबारता: 12, संचयी बारंबारता (cf): $13+12 = 25$
- › वर्ग अंतराल: 30-40, बारंबारता: 10, संचयी बारंबारता (cf): $25+10 = 35$
- › वर्ग अंतराल: 40-50, बारंबारता: 5, संचयी बारंबारता (cf): $35+5 = 40$
- › कुल बारंबारता (N) = 40।
- › अब, मध्यिका की स्थिति ज्ञात करें: $N/2 = 40/2 = 20$ वीं स्थिति।
- › संचयी बारंबारता (cf) में देखो, 20 कहाँ आएगा। यह 13 के बाद और 25 में शामिल होगा। तो हमारा 'मध्यिका वर्ग' (median class) होगा 20-30।
- › मध्यिका वर्ग 20-30 से: L (निम्न सीमा) = 20, f (बारंबारता) = 12, h (वर्ग अंतराल की चौड़ाई) = 10।
- › cf (मध्यिका वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता) = 13।
- › अब सूत्र लगाते हैं: $M = L + [(N/2 - cf) / f] \times h$
- › $M = 20 + [(20 - 13) / 12] \times 10$
- › $M = 20 + [7 / 12] \times 10$
- › $M = 20 + [0.5833] \times 10$
- › $M = 20 + 5.833$
- › $M = 25.833$

उत्तर – मध्यिका (M) = 25.833

उदाहरण 11. दस छात्रों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के डेटा से Q1 (प्रथम चतुर्थक) ज्ञात कीजिए: 22, 26, 14, 30, 18, 11, 35, 41, 12, 32।

- › सबसे पहले डेटा को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में व्यवस्थित करें: 11, 12, 14, 18, 22, 26, 30, 32, 35, 41।
- › यहाँ N (प्रेक्षणों की कुल संख्या) = 10 है।
- › Q1 की स्थिति का सूत्र है: $(N+1)/4$ वां मद।
- › तो, Q1 की स्थिति $= (10+1)/4 = 11/4 = 2.75$ वां मद।
- › इसका मतलब है कि Q1 दूसरे और तीसरे मद के बीच में है।

- › गणना ऐसे करेंगे: दूसरा मद + $0.75 \times (\text{तीसरा मद} - \text{दूसरा मद})$ ।
- › दूसरा मद 12 है और तीसरा मद 14 है।
- › तो, $Q1 = 12 + 0.75 \times (14 - 12) = 12 + 0.75 \times 2$ ।
- › $Q1 = 12 + 1.5 = 13.5$ ।

उत्तर – $Q1 = 13.5$ अंक।

उदाहरण 12. निम्नलिखित व्यक्तिगत श्रृंखला में $Q1$ और $Q3$ का परिकलन कीजिए: 10, 12, 15, 18, 20, 22, 25, 28, 30

- › पहला कदम है डेटा को आरोही क्रम में व्यवस्थित करना। यहां डेटा पहले से ही आरोही क्रम में है: 10, 12, 15, 18, 20, 22, 25, 28, 30।
- › अब हम कुल पदों की संख्या (N) गिनेंगे। यहां $N = 9$ ।
- › $Q1$ निकालने के लिए सूत्र लगाएंगे: $Q1 = (N+1)/4$ वाँ पद।
- › $Q1 = (9+1)/4 = 10/4 = 2.5$ वाँ पद।
- › 2.5 वाँ पद मतलब दूसरे पद और तीसरे पद के बीच का मान। दूसरा पद 12 है और तीसरा पद 15 है।
- › तो $Q1 = \text{दूसरा पद} + 0.5 \times (\text{तीसरा पद} - \text{दूसरा पद}) = 12 + 0.5 \times (15 - 12) = 12 + 0.5 \times 3 = 12 + 1.5 = 13.5$ ।
- › अब $Q3$ निकालने के लिए सूत्र लगाएंगे: $Q3 = 3(N+1)/4$ वाँ पद।
- › $Q3 = 3 \times (9+1)/4 = 3 \times (10/4) = 3 \times 2.5 = 7.5$ वाँ पद।
- › 7.5 वाँ पद मतलब सातवें पद और आठवें पद के बीच का मान। सातवाँ पद 25 है और आठवाँ पद 28 है।
- › तो $Q3 = \text{सातवाँ पद} + 0.5 \times (\text{आठवाँ पद} - \text{सातवाँ पद}) = 25 + 0.5 \times (28 - 25) = 25 + 0.5 \times 3 = 25 + 1.5 = 26.5$ ।

उत्तर – $Q1 = 13.5$, $Q3 = 26.5$

उदाहरण 13. एक गांव में 10 परिवारों के बच्चों की संख्या इस प्रकार है: 2, 3, 2, 4, 1, 2, 3, 2, 5, 2। इस डेटा सेट का बहुलक ज्ञात कीजिए।

- › पहला कदम, हम इन सभी संख्याओं को एक बार ध्यान से देखेंगे और गिनेंगे कि कौन सी संख्या कितनी बार आई है।
- › संख्या 1: एक बार
- › संख्या 2: पाँच बार (1, 2, 3, 4, 5)
- › संख्या 3: दो बार
- › संख्या 4: एक बार
- › संख्या 5: एक बार
- › अब हम देखेंगे कि 'Which value has the highest frequency?' – यानी किस मान की बारंबारता सबसे अधिक है। यहाँ संख्या '2' पाँच बार आई है, जो सबसे ज्यादा है।
- › तो हम कह सकते हैं कि 'The mode of this data set is 2'।

उत्तर – बहुलक = 2

उदाहरण 14. नीचे दिए गए डेटा में बहुलक ज्ञात कीजिए:

- › पहला कदम है, हमें दी गई विविक्त श्रृंखला को ध्यान से देखना है, जिसमें चर (X) और बारंबारता (f) दी गई है।
- › अब, हम 'बारंबारता' वाले कॉलम में सबसे बड़ी संख्या ढूँढ़ेंगे। यहाँ सबसे बड़ी बारंबारता 15 है।
- › आखिर में, हम देखेंगे कि इस 'सबसे बड़ी बारंबारता' (15) के सामने 'चर' (X) का मान क्या है। यहाँ 'चर' का मान 4 है।
- › तो, इस डेटा का बहुलक 4 है।

उत्तर – बहुलक (Mode) = 4

उदाहरण 15. एक कारखाने में श्रमिकों की मासिक आय (हजार रुपये में) इस प्रकार है। बहुलक ज्ञात करें:

मासिक आय (हजार रुपये): 10-15, 15-20, 20-25, 25-30, 30-35, 35-40

श्रमिकों की संख्या: 4, 8, 18, 30, 20, 10

› सबसे पहले, 'बहुलक वर्ग' (Modal Class) की पहचान करें। यहाँ 'श्रमिकों की संख्या' (frequency) सबसे अधिक 30 है, जो '25-30' के वर्ग में है। तो, 'बहुलक वर्ग' = 25-30 है।

› अब, सूत्र के लिए मान निकालें: 'L' (बहुलक वर्ग की निम्न सीमा) = 25

› 'h' (वर्ग अंतराल की चौड़ाई) = 30 - 25 = 5

› 'D1' = बहुलक वर्ग की बारंबारता - पूर्ववर्ती वर्ग की बारंबारता = 30 - 18 = 12

› 'D2' = बहुलक वर्ग की बारंबारता - परवर्ती वर्ग की बारंबारता = 30 - 20 = 10

› अब सूत्र में मान रखें: $Mo = L + [(D1 / (D1 + D2)) * h] = 25 + [(12 / (12 + 10)) * 5]$

› गणना करें: $Mo = 25 + [(12 / 22) * 5] = 25 + [0.5454 * 5] = 25 + 2.727$

› अंतिम मान: $Mo = 27.727$ हजार रुपये

उत्तर – श्रमिकों की बहुलक मासिक आय 27.727 हजार रुपये है।

उदाहरण 16. यदि किसी डेटा सेट का समांतर माध्य 45 है और बहुलक 39 है, तो इस वितरण की मध्यिका का अनुमानित मान क्या हो सकता है?

› हम जानते हैं कि 'मध्यिका सदैव समांतर माध्य और बहुलक के बीच में होती है'।

› यहाँ समांतर माध्य (Mean) = 45 है।

› और बहुलक (Mode) = 39 है।

› इसका मतलब है कि मध्यिका का मान 39 से ज्यादा और 45 से कम होगा।

› एक अनुमानित मान जो इन दोनों के बीच में आता है, वह 42 हो सकता है। यह सिर्फ एक अनुमान है, सटीक मान नहीं।

उत्तर – मध्यिका का अनुमानित मान 39 और 45 के बीच में होगा, जैसे 42।

बोर्ड परीक्षा के लिए खास

- यह अवधारणा 'केंद्रीय प्रवृत्ति की माप' के लिए आधार है। बोर्ड परीक्षा में इसकी परिभाषा और महत्व पर सीधे प्रश्न आ सकते हैं, इसलिए 'why we need it and what it does' को अच्छे से समझना ज़रूरी है।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! इससे अक्सर सीधे सूत्र पर आधारित प्रश्न आते हैं या छोटे-छोटे डेटा सेट का औसत निकालने को कहा जाता है। Assumed Mean Method और Step Deviation Method के सूत्र भी अच्छे से याद कर लेना।
- यह विधि बोर्ड परीक्षा में छोटे प्रश्नों या अन्य विधियों की गणना को सत्यापित करने के लिए महत्वपूर्ण है।
- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। 'If the number of observations is large and the figures are also large' – ऐसी स्थितियों में इन विधियों को इस्तेमाल करना सीख लो। अक्सर 4-6 नंबर का प्रश्न आता है जहाँ आपको सारणी बनाकर step-by-step हल दिखाना होता है। सूत्र और सभी चरणों को ठीक से याद रखना!
- बोर्ड परीक्षा में, समूहित आँकड़ों के लिए समांतर माध्य की गणना पर अक्सर प्रश्न आते हैं। तीनों विधियों के सूत्र और उन्हें लागू करने का तरीका अच्छे से अभ्यास कर लें, खासकर कल्पित माध्य और पद विचलन विधियाँ समय बचाती हैं।
- संतत श्रृंखला के लिए 'समांतर माध्य' की गणना बोर्ड परीक्षा में 4 से 6 अंकों का एक आम सवाल है। मध्यमान सही से निकालना और किसी एक विधि, खासकर प्रत्यक्ष विधि या पद विचलन विधि, का सही सूत्र लगाना बहुत महत्वपूर्ण है। स्टेप्स को साफ-साफ लिखें!
- भारित समांतर माध्य (Weighted Arithmetic Mean) का सूत्र और उस पर आधारित प्रश्न बोर्ड परीक्षा में अक्सर पूछे जाते हैं, इसे अच्छे से तैयार करना।

- अवर्गीकृत (ungrouped) और वर्गीकृत (grouped) दोनों तरह के डेटा के लिए मध्यिका निकालने के सूत्र और चरण अच्छे से याद कर लेना, क्योंकि यह बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर पूछा जाता है।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत ज़रूरी है। 'असमूहित और विविक्त श्रृंखला' से जुड़े मध्यिका के सवाल अक्सर आते हैं, इसलिए सूत्रों और विधि को अच्छे से समझना और अभ्यास करना।
- संतत श्रृंखला से मध्यिका का अभिकलन अक्सर 5 या 6 नंबर के सवाल के रूप में बोर्ड परीक्षा में आता है, तो इसे बहुत अच्छे से अभ्यास करना।
- चतुर्थक और शतमक की स्थिति निकालने के सूत्र $(N+1)/4$, $3(N+1)/4$, और $k(N+1)/100$ को याद रखना और 'व्यवस्थित डेटा' को 'आरोही क्रम' में व्यवस्थित करना कभी मत भूलना, यह सबसे पहली और सबसे ज़रूरी स्टेप है।
- यह विषय बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। व्यष्टिगत और विविक्त दोनों श्रृंखलाओं में चतुर्थकों के परिकलन के सवाल अक्सर आते हैं। हर सवाल में सबसे पहले डेटा को आरोही क्रम में लगाना मत भूलना, इसके भी अंक मिलते हैं।
- बहुलक का कॉन्सेप्ट अक्सर एक नंबर या छोटे सवाल में आता है, खासकर सरल या विविक्त श्रृंखला (discrete series) के लिए। इसे अच्छे से समझ लो।
- यह बहुत ही Scoring Concept है बेटा, अक्सर एक छोटा सवाल इस पर आता है। बस 'highest frequency' के सामने वाली 'value' को पहचानना है, यही सबसे ज़रूरी बात है।
- यह 'संतत श्रृंखला' में बहुलक का अभिकलन बोर्ड परीक्षाओं में 4 या 6 अंकों के बड़े प्रश्न के रूप में आता है। सूत्र को ठीक से याद रखना और गणना में कोई गलती न करना बहुत ज़रूरी है।
- यह कॉन्सेप्ट सीधे सवाल के रूप में कम आता है, पर यह आपको केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों की गहरी समझ देता है और 'सामान्य वितरण' (normal distribution) को समझने में मदद करता है।

एक नज़र में रिवीज़न

- › आँकड़ों को एक प्रतिनिधि मान में संक्षिप्त करना।
- › समांतर माध्य = सभी प्रेक्षणों का योग / प्रेक्षणों की कुल संख्या
- › असमूहित माध्य = प्रेक्षणों का योग / प्रेक्षणों की कुल संख्या (X / N)
- › बड़े आँकड़ों के लिए: कल्पित माध्य ($X = A + d/N$), पद विचलन ($X = A + (d/N) \times c$)
- › समूहित आँकड़े (विविक्त): प्रत्यक्ष, कल्पित माध्य, पद विचलन विधि से X
- › संतत श्रृंखला में समांतर माध्य: पहले मध्यमान (m) निकालो, फिर discrete series वाली विधियाँ लगाओ।
- › माध्य से विचलन का योग 0; चरम मानों से प्रभावित; भारित माध्य = WX/W
- › मध्यिका = केंद्रीय मान, डेटा को दो बराबर हिस्सों में बांटता है, चरम मूल्यों से अप्रभावित।
- › असमूहित/विविक्त श्रृंखला में मध्यिका: आरोही क्रम, $(N+1)/2$ स्थिति, फिर मान/cf से चर मान।
- › संतत श्रृंखला मध्यिका: $N/2$ स्थिति, मध्यिका वर्ग, सूत्र $M=L+[(N/2-cf)/f] \times h$
- › चतुर्थक डेटा को 4, शतमक 100 बराबर भागों में बांटते हैं।
- › चतुर्थक (Q_1, Q_3): व्यष्टिगत में $(N+1)/4$ और $3(N+1)/4$ वाँ पद; विविक्त में CF से।
- › बहुलक = सर्वाधिक बारंबारता वाला मान (most frequent value).
- › विविक्त श्रृंखला में, सबसे अधिक बारंबारता वाला चर का मान बहुलक है।
- › संतत श्रृंखला में बहुलक के लिए बहुलक वर्ग पहचानो, फिर सूत्र $Mo = L + [D1/(D1+D2)] \times h$ लगाओ।
- › मध्यिका हमेशा समांतर माध्य और बहुलक के बीच होती है।